

**АВТОМАТИЗАЦИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ
РЕКУРСИВНАЯ АЛГОРИТМИЗАЦИЯ КРИВОЙ, ЗАПОЛНЯЮЩЕЙ
МНОГОМЕРНЫЙ ИНТЕРВАЛ**

В. В. АЛЕКСАНДРОВ, В. М. ЛАЧИНОВ, А. О. ПОЛЯКОВ
(Ленинград)

Введение. В работе предлагается способ решения круга задач, связанных с выяснением структуры объекта — точечного множества $E \subset X^n$ — путем построения аппроксимаций отображения

$\varphi: X^n \rightarrow R^+$.

Аналогичные постановки задачи [1–5], отличающиеся как по типу объекта, так и по способу построения отображения, дают возможность подразумевать под термином «структура» весьма широкий круг понятий. Так, в [4] — это структура в смысле задачи автоматической классификации, в [5] искомой структурой является описание некоторой сложной функция многих переменных в виде списка координат ее экстремумов и т. д. (т. е. структура понимается не в смысле топологии, алгебры или статистики).

Здесь будем понимать под структурой $E \subset X^n$ некоторое описание E в виде списка сгущений $E_1, E_2, \dots, E_m \subset E$, задаваемых координатами точек e_i^* — «типичных представителей» E_i ($e_i^* \in E_i$) и некоторых параметров, например диаметров $\text{diam } E_i$, упорядоченного по некоторому заданному критерию

$$e_1^*, \text{diam } E_1 > e_2^*, \text{diam } E_2 > \dots > e_m^*, \text{diam } E_m.$$

Таким образом, любая процедура построения оценки (программой или человеком) и принятия решения о результате сводится к установлению однозначного предпочтения между элементами структуры, т. е. к отображению $X^n \rightarrow R^+$, где R^+ — одномерная шкала с заданным классифицирующим отношением, например отношением естественного порядка [6].

Следует отметить, что снижение размерности задачи в [1–5], использующих отображение $H: [0, 1) \rightarrow R^n$, достигается именно благодаря некоторым свойствам (монотонности H и существованию сужения обратного отображения H^{-1}), поэтому постановка задачи о построении $\varphi: X^n \rightarrow R^+$ имеет практический смысл.

Полагая данные нормированными к единичному эвклидову кубу, т. е. $E \subset X^n \subset R^n$, $x_i \in [0, 1)$, будем строить отображение следующим образом.

1. Интервал $[x_1, x_2, \dots, x_n] \subset X^n \subset R^n$, $x_i \in [0, 1)$, разбивается плоскостями, параллельными координатным и проходящими через точки $(1/2^k)x_i$ ($i = \overline{1, n}$), где $k = \overline{1, m}$ — степень дробления интервала на $2^{n \cdot m}$ подынтервалов (клеток). На R^+ (например, на $[0, 1)$) выбирается шкала интервалов $j = \overline{1, 2^{n \cdot m}}$.

2. Устанавливается соответствие φ_n^m между подынтервалом на R^n и номером j таким образом, чтобы:

а) любые два интервала $j, j+1$ отображались в соседние подынтервалы R^n ;

б) каждый последующий подынтервал в R^n определялся однозначно по его номеру j на R^+ параметрам n и m ;

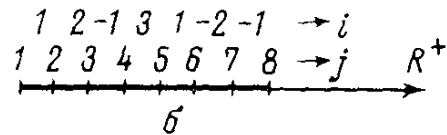
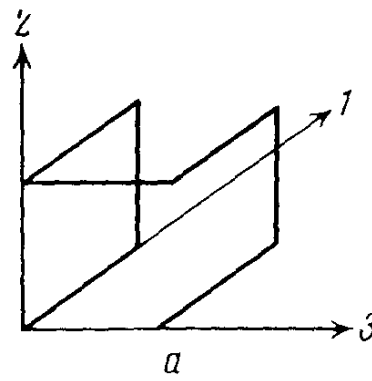
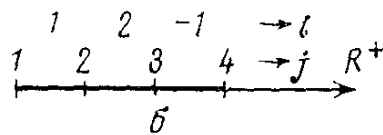
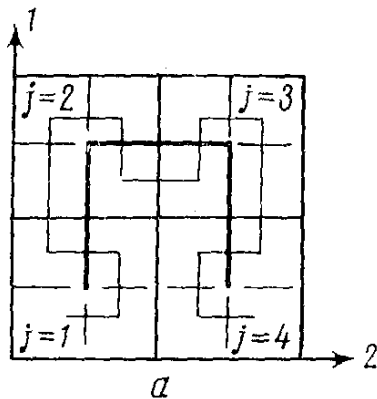
в) отношение соседства между интервалами, близкими в R^n , но оказавшимися не соседними в R^+ устанавливалось по заранее заданному правилу.

Указанное отображение можно построить перечислением на R^+ элементов клеточного разбиения в том порядке, в каком через них проходит соответствующая аппроксимация кривой Гильберта, иначе говоря, разветвления кривой на числовую ось. Определение и пример «кривой, плотно заполняющей квадрат» дано Гильбертом для R^2 в 1891 г. [7].

В отличие от [1–5], где «перечисляющая кривая» строится при помощи процедур исчерпывания, т. е. путем перебора возможных направлений каждого следующего элемента кривой с учетом уже построенного участка, будем строить алгоритм, порождающий элементы рекурсивно по номерам их ячеек $j = 1, 2^{n-m}$ на R^+ и параметрам n, m .

1. Алгоритм построения развертки φ_n^m . Представим алгоритм в виде четырех этапов.

1. Построение эталонной кривой (развертки первого разбиения). Будем называть эталоном кривую, обходящую единичный R^n -куб, разбитый на 2^{k-n} частей ($k=1$) плоскостями, проходящими через середины ребер. Для $n=2$ и $n=3$ эталоны приведены на фиг. 1 и 2.



Фиг. 1. Светлая линия — для φ_2^2 , жирная — для Θ_2

Фиг. 2

Распространив определение по индукции на произвольное n , получим схему

$$\begin{aligned}
 n=2 \quad \Theta_2 &= l_1, l_2, -l_1; \quad \bar{\Theta}_2 = l_1, -l_2, -l_1; \\
 n=3 \quad \Theta_3 &= \Theta_2, l_3, \bar{\Theta}_2; \\
 &\dots \\
 n=i \quad \Theta_i &= \Theta_{i-1}, l_i, \bar{\Theta}_{i-1}.
 \end{aligned}$$

Здесь $\bar{\Theta}_i$ — «зеркальная» запись эталона Θ_i , l_i — векторы, имеющие индекс координатной оси, по которой делается очередной шаг развертки со знаком (направление

шага) — элементы развертки; $i = \overline{1, n}$ — порядковые номера осей.

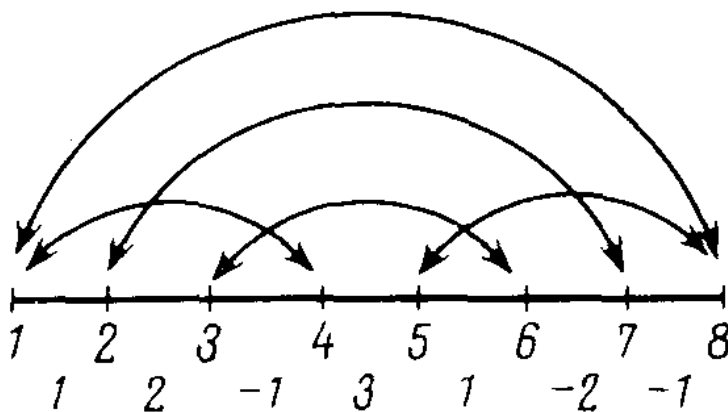
В каждом конкретном случае величина шага $l_i = 1/2^k$, где k — степень разбиения. Правило чередования знаков определяется по индукции и эталону \mathcal{E}_2 . Непосредственная реализация схемы \mathcal{E}_n требует хранения в памяти ЭВМ последовательности \mathcal{E}_{n-1} длиной 2^{n-1} элементов, однако из индуктивного определения, следует уравнение, определяющее рекурсивное вычисление элементов эталона по номеру в R^+ :

$$j = 2^{(i-1)} + b \times 2^{(i+1)} + c \times 2^i. \quad (1.1)$$

Здесь $j = 2, 4, 6, \dots, 2^n$ — порядковый номер элемента в последовательности; $b = 0, 1, 2, \dots$ — формальный параметр, принимающий значения от нуля до числа вхождений эталона \mathcal{E}_2 в запись эталона \mathcal{E}_n ; $c = 0.1$ — формальный параметр: $l_i = (-1)^c \times i$.

Из определения эталона можно видеть, что \mathcal{E}_n образуется заполнением пустых мест в последовательности $l_1, \emptyset, -l_1, \emptyset, l_1, \emptyset, -l_1, \dots$, где \emptyset — символ «пусто». Приведенное уравнение позволяет вычислить значение l_i по номеру элемента j в указанной последовательности. Единственность целочисленного решения уравнения (1.1) для всех значений параметров при каждом j очевидна.

Из способа определения эталона также очевидно, что соседними в R^n будут элементы, расположенные на R^+ симметрично относительно l_i на глубину $\gamma = 2^{(i-1)}$ (фиг. 3).



Фиг. 3

2. Переходы при старших разбиениях. Будем называть кривую, обходящую разбиение R^n -куба на $2^{k \cdot n}$ частей, k -м приближением кривой Гильберта. Естественно строить кривую таким образом, чтобы она составлялась из 2^n кривых, обходящих разбиения $2^{(k-1) \cdot n}$, переходы между которыми задаются кривой обхода разбиения 2^n , т. е. эталоном первого разбиения.

Таким образом, индукция распространяется не только на размерности, но и на степень

дробления интервала. Эталонном для разбиения $2^{k \cdot n}$ является кривая обхода $2^{(k-1) \cdot n}$.

3. Неформальная операция по выбору положения эталонов $n = 3, k = 2$. Выполнение условия Жордана — непрерывности линии и условий индуктивного определения кривых 1 и 2 требует специального выбора положения эталонов, что связано с необходимостью задания направления ориентации кривой при переходе в размерности $n \geq 3$. Однако, выбрав определенным образом положение первых четырех эталонов в развертке для $n = 3, k = 2$ можно распространить индуктивное определение на произвольные размерности и разбиения.

4. Алгоритм развертки для произвольных k и n . Зададим положения первых четырех эталонов для $n = 3, k = 2$ следующим образом:

$$\mathfrak{E}_{3(1)}^2 = l_2, l_3, -l_2, l_1, l_2, -l_3, -l_2;$$

$$\mathfrak{E}_{3(2)}^2 = l_1, l_3, -l_1, l_2, l_1, -l_3, -l_1;$$

$$\mathfrak{E}_{3(3)}^2 = \mathfrak{E}_{3(2)}^2;$$

$$\mathfrak{E}_{3(4)}^2 = -l_2, -l_1, l_2, l_3, -l_2, l_1, l_2.$$

Здесь $\mathfrak{E}_{n(q)}^k$ — первые четыре эталона, развернутые указанным способом; q — порядковый номер эталона $(k-1)$ -го приближения (в общем случае $q = \overline{1, 2^{n-1}}$).

Обозначив развертку для размерности n и разбиения $k\varphi_n^m$ для $k = 2, n = 3$ запишем

$$\varphi_3^2 = \mathfrak{E}_{3(1)}^2, l_1, \mathfrak{E}_{3(2)}^2, l_2, \mathfrak{E}_{3(3)}^2, -l_1, \mathfrak{E}_{3(4)}^2, l_3, \tilde{\mathfrak{E}}_{3(4)}^2, l_1, \tilde{\mathfrak{E}}_{3(3)}^2, -l_2, \tilde{\mathfrak{E}}_{3(2)}^2, -l_1, \tilde{\mathfrak{E}}_{3(1)}^2,$$

где $\tilde{\mathfrak{E}}_{3(q)}^2$ соответствующая зеркальная запись эталона без смены знака у l_3 . Обозначим $\mathfrak{E}_{3(q)}^2 = \sqcup, A, \sqcup$, где \sqcup — изображение части записи $\mathfrak{E}_{3(q)}^2$, A — 2^{n-1} -й элемент записи.

Распространив для $\mathfrak{E}_{n(q)}^2$, запишем

$$\begin{array}{c} \mathfrak{E}_{n-2(\varphi)}^2 = \overbrace{\quad \quad \quad}^A, A, \overbrace{\quad \quad \quad} \\ \downarrow \quad \quad \quad \quad \quad \downarrow \\ \mathfrak{E}_{n-1(\varphi)}^2 = \overbrace{\quad, l_{n-1}, \quad}^A, A, \overbrace{\quad, -l_{n-1}, \quad} \\ \downarrow \quad \quad \quad \quad \quad \downarrow \\ \mathfrak{E}_{n(\varphi)}^2 = \overbrace{\quad, l_n, \quad}^A, A, \overbrace{\quad, -l_n, \quad} \end{array}$$

Аналогичная операция проводится для остальных приближений

$$\varphi_n^2 = \overbrace{\mathfrak{E}_{n(1)}^2, \mathfrak{E}_{n(2)}^2, \dots, \mathfrak{E}_{n(2^{n-1})}^2}^Q, \tilde{Q},$$

$$\quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$$

$$\quad \quad \quad \underbrace{l_1, \quad l_2, \dots, -l_1, \quad l_n, \dots}_{\mathfrak{E}_n}$$

Где если $\mathfrak{E}_{n(2^{n-1})}^2 = \sqcup, n, \sqcup, B, \sqcup, -n, \sqcup$, то $\mathfrak{E}_{n(2^{n-1})}^2 = \sqcup, B, \sqcup, n, \sqcup, -B, \sqcup$. Принимая за эталон для произвольного k развертку $(k-1)$ -го дробления, запишем

$$\varphi_n^k = \overbrace{(\varphi_{n(1)}^{k-1}, \dots, \varphi_{n(2^{n-1})}^{k-1})}^{Q_n^k}, \tilde{Q}_n^k$$

$$\uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$$

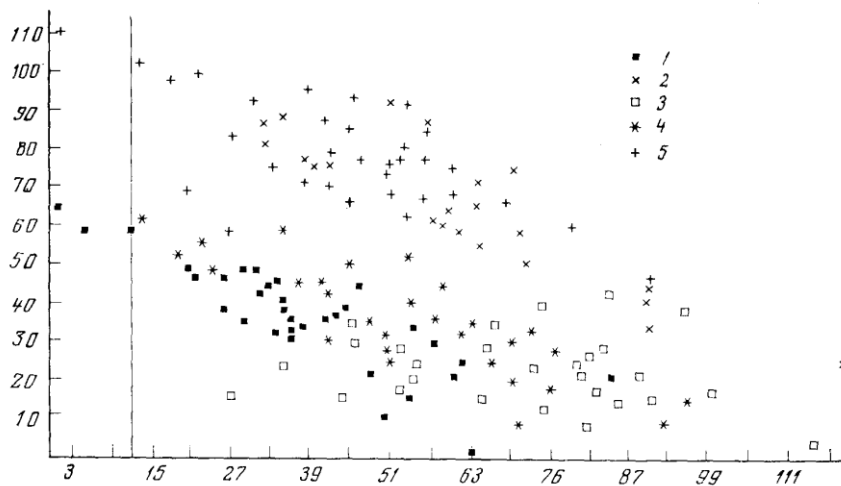
$$l_1, \dots, l_1, \quad \quad \quad l_n, \dots,$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\vartheta_n}$$

Приведенный алгоритм реализован в виде программ в языках БЭСМ-6: АЛГОЛ, АНАЛИТИК, АСВТ — АССЕМБЛЕР и в настоящее время испытывается на различных задачах. Выше приведена самая общая схема, по которой написана первая опытная программа на АЛГОЛе. С учетом конкретных задач и особенностей ЭВМ алгоритм может быть модифицирован, что дает повышение быстродействия приблизительно на порядок.

2. Описание эксперимента. Рассмотрим работу алгоритма $\varphi_n^m: R^n \rightarrow R^+$ на примере задачи автоматической классификации. Назовем развертку φ_n^k , на ячейках которой в R^+ отмечены плотности точек выборки (число точек, попавших в данный R^n подынтервал, отнесенное к его объему), компонентой плотности выборки $E \subset R^n$. Набор φ_n^k ($k = \overline{1, m}$) назовем спектром плотности E .

До тех пор пока значение плотности продолжает расти на каждом следующем шаге дробления, почти все сгущения точек оказываются целиком в некоторых R^n -подынтервалах. Выберем в качестве критерия останова программы максимум производной плотности.



Фиг. 4. Объекты: 1 — первого класса, 2 — второго класса, 3 — третьего класса, 4 — четвертого класса, 5 — пятого класса

На фиг. 4 и 5 представлены результаты испытаний на задаче классификации восьмимерной выборки, заданной стандартным генератором случайных чисел. Параметры генератора: число точек $\text{card}E = 150$, число классов — 5, взаимные расстояния $d = 0.5$, стандартное отклонение $\sigma = 0.1$ (сферы уровня 0.5 плотности распределения классов соприкасаются) и $\sigma = 0.2$. Порядок генерации точек помечен на фигурах. По результатам работы программы «главных компонент» (фиг. 4) решение принять, очевидно, невозможно. При значении $\sigma = 0.1$ агломеративная процедура (вариант «дальний сосед» с релаксационным порогом и останомом по максимуму производной межклассового расстояния известен, например, под названием «плесень») и компонента φ_8^2 дают одинаковую классификацию, похожую на фиг. 5.

При значении $\sigma = 0.2$ агломеративная процедура не выходит па останов (повидимому, при размерности $n = 8$ и заданном пересечении распределений число точек недостаточно для построения устойчивой оценки межклассового расстояния),

искусственный останов даст произвольные классификации. Компонента φ_8^2 для $\sigma = 0.2$ приведена на фиг. 5. Время счета программ (ОС «Диспак», в сек): «главные компоненты» — 5.1, «динамические кластеры» — 23, алгоритм, предложенный в данной статье, — 1.28.

Следует отметить высокую экономичность реализации метода разверток φ_n^m , поскольку в силу рекурсивности процедуры отображения можно обрабатывать данные последовательно, сама программа весьма компактна и может работать на мини-ЭВМ с малым объемом ОЗУ (М-6000, «Мир-2» и т. п.) даже на задачах большой размерности.

Для сравнения укажем, что при размерности $n = 8$ и длине выборки $\text{card}E = 150$ программа «динамических кластеров» требует половины трактов барабанов полного комплекта БЭСМ-6. Ясно, что решение таким методом задач размерностью $n > 10$ весьма затруднительно даже при использовании дополнительных допущений и приемов программирования.

Обсуждение метода. Другие возможные применения. Из способа построения спектров плотности φ_n^m непосредственно следует, что положение разрывов в отображении $\varphi_n^k: R^n \rightarrow R^+$ стандартно как относительно R^n , так и относительно R^+ . Таким образом, отображение можно попользовать для задач типа опознания с эталоном, определяя эквивалентность эталонного и экзаменационного объектов как совпадение их спектров $\varphi'_{n(\text{эт})} \approx \varphi^i_{n(\text{об})}$ $I_1 < i < I_2$. При предъявлении нескольких сходных объектов выбирается тот, для которого разность $I_2 - I_1$ максимальна, т. е. совпадает наибольшее число компонент спектра.

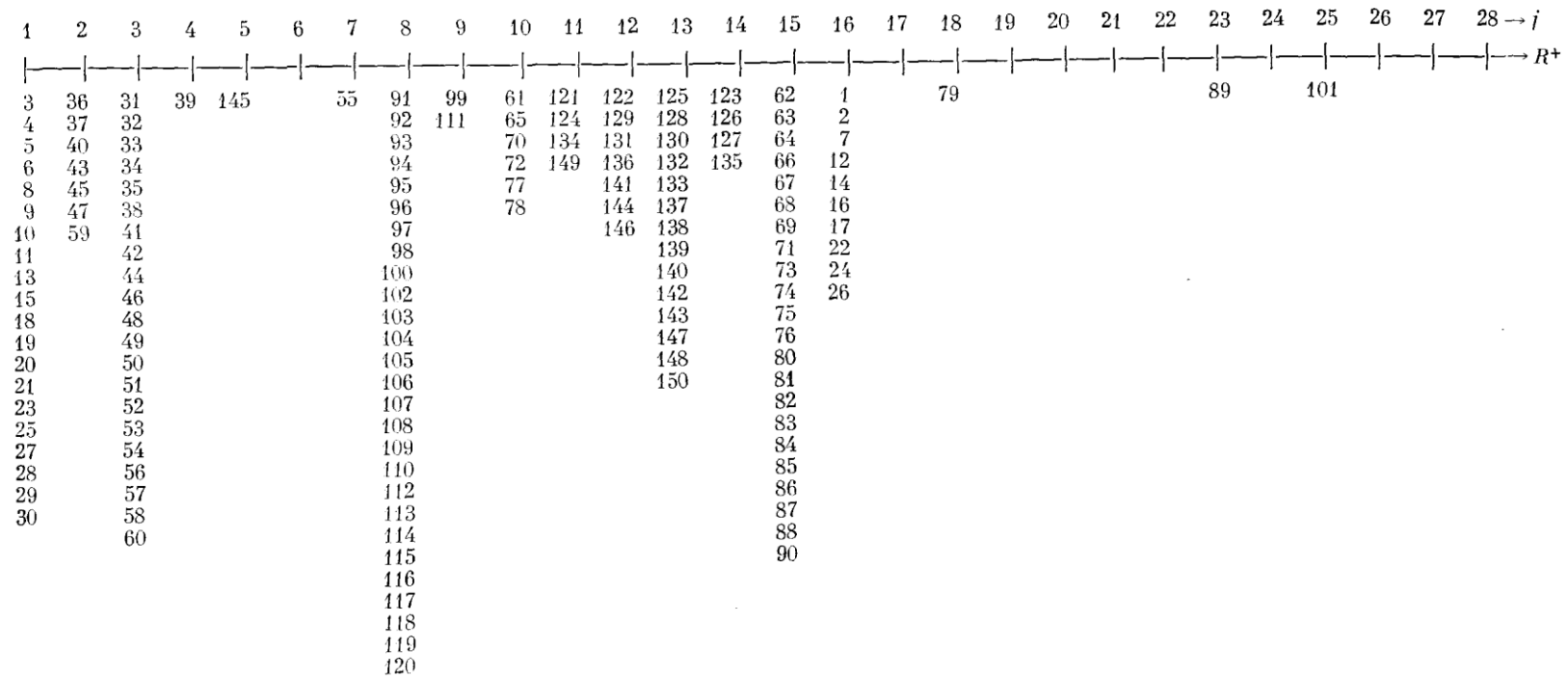
Имеющаяся возможность осуществления склеек разрывов в R^+ позволяет говорить об однозначном представлении выборки $E \subset R^n$ с точностью до элемента с ребром $\frac{1}{2^{n-m}}$ спектром плотности φ_n^{m+1} — здесь имеется определенная аналогия с теоремой отсчетов.

Алгоритм можно использовать для тех же целей, что и в [1–3], а именно для поиска экстремумов многомерных отображений, имеющих плохие локальные свойства, и для решения нелинейных систем (путем поиска экстремума функции невязки). При этом алгоритм построения φ_n^m , используемый для порождения сеток, оказывается примерно в $\frac{1}{2}(2^m - 1) \cdot P(2^{n-1})$ раз эффективнее в смысле быстродействия, чем «переборные», основанные на идее исчерпывания процедуры (здесь P — перестановки).

Поступило 21 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Butz A. R. Convergence with Hilbert's space filling curve. J. Comput. System. Sci., 1962, May.
2. Butz A. R. Alternative algorithm for Hilbert's space filling curve. IEEE Trans. Comput., 1971, C-20, Apr.
3. Стронгин Р. Г. Информационно-статистический метод решения систем нелинейных уравнений. В сб. Проблемы случайного поиска. «Зинатне», Рига, 1975, № 4.
4. Abend, K., Harley T. Kanal L. N. Classification of binary random patterns. IEEE Trans. Inform. Theory, 1965, IT-11, Oct.
5. Patrik E. A., Anderson D. R., Bechtel F. K. Mapping multidimensional space to one dimension for computer display. IEEE Trans. Comput., 1968, C-17, Oct.
6. Пфанцгль И. Теория измерений. «Мир», 1976.
7. Hilbert D. Veber die stetige Abbildung einer Linie auf oin Flächensluck. J. Math. Ann., 1891, Mar.



Фиг. 5. Объекты: 1 — 30 — первого класса, 31 — 60 — второго класса, 61 — 90 — третьего класса, 91 — 120 — четвертого класса, 121 — 150 — пятого класса

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ
НАУК СССР
ТЕХНИЧЕСКАЯ
КИБЕРНЕТИКА

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)